準周期的非線形振動を解くGalerkin法 (数値計算のアルゴリズムの研究)

三井, 斌友

数理解析研究所講究録
310巻 1977年 57-71

準周期的非線形振動を解くGALERKIN法

京大 数理研　　三井斌友

§1. 序

周期的非線形微分方程式の周期解を近似するGALERKIN-URABEの方法は，この方面の数値解析で大きな成功を収めた([2])。ここでは上記の方法を準周期的(quasiperiodic)な場合に拡張することを試みる。

周期 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ の準周期函数 $f(t)$ とは，或る連続函数 $f_0(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が存在して，変数 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ について各々周期 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ の周期函数であり，

(1.1)　$f(t) = f_0(t, t, \cdots, t)$

が成り立つことである。ここで，$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ は正，かつその逆数は rationally linearly independent と仮定してよい。

周期 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ の（ベクトル値）準周期的（線形）微分作用素 L とは，周期 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ の準周期行列 $A(t)$ によって

(1.2)　$Lx = \frac{dx}{dt} - A(t)x$

とあらわされるものをいう。準周期の概念は概周期の概念に

含まれることに注意し，同じように概周期的微分作用素

(1.3) $\mathcal{L}y = \frac{dy}{dt} - \mathcal{A}(t)y$

を考える。$\mathcal{L}$は，方程式

(1.4) $\mathcal{L}y = \psi(t)$

が任意の概周期函数$\psi(t)$に対して，少なくとも一つの有界な解をもつとき regular という。

Proposition 1. ([1]) $\mathcal{L}$が regular である必要十分条件は，正方行列 P で次の性質をみたすものが存在することである。

(i) $P^2 = P$,

(ii) $\|\Phi(t)P\Phi^{-1}(s)\| \leq Ce^{-\sigma(t-s)}$ for $t \geq s$,

(iii) $\|\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s)\| \leq Ce^{-\sigma(s-t)}$ for $t \leq s$

ここで$\Phi(t)$は斉次方程式

(1.5) $\mathcal{L}y = 0$

の解で$\Phi(0) = E$をみたすもの(以下このような行列を matrizant と呼ぶ)，Cとσは正定数である。

Proposition 2. ([3]) (1.2)で定義される準周期的微分作用素が，概周期的微分作用素として regular ならば，方程式

(1.6) $Lx = f(t)$

は，周期$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$の任意の準周期函数$f(t)$に対して，同じ周期の唯一の準周期解$x = x(t)$をもち，その解は

(1.7) $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s)f(s)ds$

と表わされる。但

$$(1.8)\quad G(t,s)=\begin{cases}\Phi(t)P\Phi^{-1}(s) & \text{for } t\geqq s,\\ -\Phi(t)(E-P)\Phi^{-1}(s) & \text{for } t\leqq s.\end{cases}$$

この函数 $G(t,s)$ は L に対する GREEN 函数と呼ばれ,

$$(1.9)\quad \|G(t,s)\|\leqq Ce^{-\sigma|t-s|}$$

をみたす。上の Proposition を用いて, 非線形方程式に対する近似定理がえられる。

Theorem ([3]) 非線形方程式

$$(1.10)\quad \frac{dx}{dt}=X(t,x)$$

を考える。ここで x, X はベクトル, $X(t,x)$ は t について周期 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ の準周期函数, x 空間の領域 $\mathcal{D}$ において x について連続的微分可能とする。

周期 $\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_m$ の準周期函数 $x_0(t)$ で

$$(1.11)\quad \begin{cases} x_0(t)\in\mathcal{D} & \\ \left\|\dfrac{dx_0(t)}{dt}-X[t,x_0(t)]\right\|\leqq r & \end{cases}\qquad \text{for all } t$$

をみたすものが存在するとする。更に定数 $\delta>0$ と $0<\kappa<1$ および準周期行列 $A(t)$ があって, 次の性質をみたすとする。

(i) 準周期的作用素

$$Ly=\frac{dy}{dt}-A(t)y$$

は概周期的作用素として regular.

(ii) $\{ D_\delta\equiv\{x;\ \|x-x_0(t)\|\leqq\delta\ \text{ for some } t\}\subset\mathcal{D},$

$$\begin{cases} \|\Psi(t,x) - A(t)\| \leqq \dfrac{\kappa}{M} & \text{whenever } \|x - x_0(t)\| \leqq \delta, \\ \dfrac{Mr}{1-\kappa} \leqq \delta. \end{cases}$$

ここで $\Psi(t,x)$ は $X(t,x)$ の x に関する Jacobian 行列であり，M は (1.9)式にいう C と σ によって

(1.12) $\quad M = 2C/\sigma.$

すると，方程式 (1.10) は周期 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ の準周期解 $x = \hat{x}(t)$ をもち

(1.13) $\quad \|x_0(t) - \hat{x}(t)\| \leqq \dfrac{Mr}{1-\kappa}$

がなりたつ。そして $\hat{x}(t)$ に対しては，作用素

(1.14) $\quad \hat{L}y = \dfrac{dy}{dt} - \Psi[t, \hat{x}(t)]y$

が概周期作用素として regular であり，また (1.10) は D_δ の内では他に解をもたないという意味で $\hat{x}(t)$ は孤立解である。

§2. 2階線形方程式.

以下では準周期函数の周期は ω_1 と ω_2 のみである場合に限って考える。ω_1/ω_2 は非有理数である。

準周期的微分方程式

(2.1) $\quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\mu\dfrac{dx}{dt} + \nu^2 x = a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t$

を考える。ここで ν, μ は定数で，$\nu > 0$，$0 < |\mu| < \nu$，また $\nu_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$，$\nu_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$．(2.1)をベクトルの形に書き直すと

(2.2) $\quad \dfrac{dx}{dt} - Ax = \varphi(t)$

但 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\mu \end{bmatrix}$, $\varphi(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ a\cos\nu_1 t+b\cos\nu_2 t \end{bmatrix}$.

(2.3) $L\mathbf{x}=\dfrac{d\mathbf{x}}{dt}-A\mathbf{x}$

とすれば，Lによる斉次方程式の matrizant は簡単に分って

(2.4) $\Phi(t)=e^{-\mu t}\begin{bmatrix} \cos\theta t+\frac{\mu}{\theta}\sin\theta t & \frac{1}{\theta}\sin\theta t \\ -\frac{\nu^2}{\theta}\sin\theta t & \cos\theta t-\frac{\mu}{\theta}\sin\theta t \end{bmatrix}$

但 $\theta=\sqrt{\nu^2-\mu^2}$. ベクトルと行列のノルムを

$\|\mathbf{v}\| = \max_i |v_i|$ for $\mathbf{v}=(v_i)$

$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ for $A=(a_{ij})$

とすれば

(2.5) $\|\Phi(t)\| \leqq Ce^{-\mu t}$

但 $C=\dfrac{\nu+1}{\theta}\cdot\max(1,\nu)$

がなりたつ。従って

Proposition 3. $0<|\mu|<\nu$ ならば，Lは周期 ω_1, ω_2 の準周期的作用素として regular であり，GREEN 函数は

$\mu>0$ のときは $G(t,s)=\begin{cases} \Phi(t-s) & \text{for } t\geqq s \\ 0 & \text{for } t<s \end{cases}$,

$\mu<0$ のときは $G(t,s)=\begin{cases} 0 & \text{for } t\geqq s \\ -\Phi(t-s) & \text{for } t<s \end{cases}$

によって与えられ，結局(2.1)の準周期解は

(2.6) $x(t)=\dfrac{a}{(\nu^2-\nu_1^2)^2+4\mu^2\nu_1^2}[(\nu^2-\nu_1^2)\cos\nu_1 t+2\mu\nu_1\sin\nu_1 t]$

$+\dfrac{b}{(\nu^2-\nu_2^2)^2+4\mu^2\nu_2^2}[(\nu^2-\nu_2^2)\cos\nu_2 t+2\mu\nu_2\sin\nu_2 t]$

となる。

§3. DUFFING 型方程式

3.1 この節では準周期的強制項をもつDUFFING型の方程式

(3.1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma\frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \varepsilon x^3 + a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t$$

を考える。但 $0<\sigma<\nu$, εは正のパラメータ, $\nu_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, $\nu_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$。

(3.1) はベクトル形

(3.2) $$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varphi}(t)$$

但 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\sigma \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x^3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t \end{bmatrix}$

にして考えれば，前節の結果から

$$L\boldsymbol{y} = \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} - A\boldsymbol{y}$$

は regular であって，従って§1の Theorem を用いればεが十分

小さければ $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0(t) = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix}$,

(3.3) $$x_0(t) = \frac{a}{(\nu^2-\nu_1^2)+4\sigma^2\nu_1^2}\left[(\nu^2-\nu_1^2)\cos\nu_1 t + 2\sigma\nu_1\sin\nu_1 t\right] + \frac{b}{(\nu^2-\nu_2^2)+4\sigma^2\nu_2^2}\left[(\nu^2-\nu_2^2)\cos\nu_2 t + 2\sigma\nu_2\sin\nu_2 t\right]$$

の近傍に真の準周期解が存在する（[3]）。

3.2 GALERKIN scheme.

準周期性の定義から，対応する二重周期函数と偏微分方程式を導入する。すなわち

(3.4) $$D\tilde{\boldsymbol{x}} = A\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(u_1, u_2) + \varepsilon\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{x}})$$

但 $D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2}$, $\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(u_1,u_2) \\ \tilde{y}(u_1,u_2) \end{bmatrix}$, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(u_1,u_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ a\cos\nu_1 u_1 + b\cos\nu_2 u_2 \end{bmatrix}$,

$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}^3 \end{bmatrix}$.

(3.4) に u_1について周期ω_1, u_2について周期ω_2の二重周期解$\tilde{\boldsymbol{x}}$

$=\tilde{x}(u_1, u_2)$ が存在したとすれば，$x(t)=\tilde{x}(t, t)$ は (3.1) の準同期解である。そこで (3.4) を近似的に解く。それには有限二重 FOURIER 級数に展開する方法を用いる。近似解を

$$
(3.5)\quad \begin{cases} x_m(u_1, u_2) = \alpha(0,0) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{|p|=r} \{\alpha_p \cos(p, \nu, u) + \beta_p \sin(p, \nu, u)\}, \\ y_m(u_1, u_2) = \alpha'(0,0) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{|p|=r} \{\alpha'_p \cos(p, \nu, u) + \beta'_p \sin(p, \nu, u)\} \end{cases}
$$

とおく。ここで p は整数の組 $p=(p_1, p_2)$ であり

$(p, \nu, u) = p_1 \nu_1 u_1 + p_2 \nu_2 u_2$

$|p| = |p_1| + |p_2|$

$\sum_{|p|=r}$ は $|p|=r$ なるすべての p についての和である。正弦·余弦函数の性質から

$$
(3.6)\quad \alpha_{-p} = \alpha_p, \quad \beta_{-p} = -\beta_p \qquad (-p=(-p_1, -p_2))
$$

が成り立たねばならない。α'_p, β'_p についても同様である。上の未定係数 $\alpha_p, \beta_p, \alpha'_p, \beta'_p$ を，x_m, y_m を (3.4) に代入したときその残差が FOURIER basis と直交するように決める。

$$
(3.7)\quad \mathcal{J}\{f(u_1, u_2)\} = \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_2} f(u_1, u_2) du_1 du_2
$$

なる記法を導入すると，まず

$$
(3.8)\quad \begin{cases} 2 \cdot \mathcal{J}\left[\{D x_m(u) - y_m(u)\} \begin{Bmatrix} \cos(p, \nu, u) \\ \sin(p, \nu, u) \end{Bmatrix}\right] = 0 \\ \mathcal{J}[D x_m(u) - y_m(u)] = 0 \end{cases}
$$

より

$$
(3.9)\quad \begin{cases} \alpha'(0,0) = 0 \\ \alpha'_p = (p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2) \beta_p \qquad \beta'_p = -(p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2) \alpha_p . \end{cases}
$$

これを用いると，決定方程式として次のものがえられる。

$$(3.10)_1 \quad f^{(m)}(0,0) \equiv \nu^2\alpha(0,0) - \varepsilon \mathcal{I}\{x_m^3(u)\} = 0$$

$$(3.10)_2 \quad f^{(m)}(1,0) \equiv (\nu^2-\nu_1^2)\alpha(1,0) + 2\sigma\nu_1\beta(1,0) - \frac{a}{2} - 2\varepsilon \mathcal{I}\{x_m^3(u)\cos\nu_1 u_1\} = 0$$

$$(3.10)_3 \quad f^{(m)}(0,1) \equiv (\nu^2-\nu_2^2)\alpha(0,1) + 2\sigma\nu_2\beta(0,1) - \frac{b}{2} - 2\varepsilon \mathcal{I}\{x_m^3(u)\cos\nu_2 u_2\} = 0$$

$$(3.10)_4 \quad f^{(m)}(p_1,p_2) \equiv \{\nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}\alpha_p + 2\sigma(p_1\nu_1+p_2\nu_2)\beta_p$$
$$-2\varepsilon \mathcal{I}\{x_m^3(u)\cos(p,\nu,u)\} = 0 \qquad \text{for} \quad |p| \geqq 2$$

$$(3.10)_5 \quad g^{(m)}(p_1,p_2) \equiv \{\nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}\beta_p - 2\sigma(p_1\nu_1+p_2\nu_2)\alpha_p$$
$$-2\varepsilon \mathcal{I}\{x_m^3(u)\sin(p,\nu,u)\} = 0 \qquad \text{for} \quad |p| \geqq 1$$

(3.6)から未定係数のベクトル $\alpha^{(m)} = {}^t(\alpha(0,0), \cdots, \alpha_p, \beta_p, \cdots)_{|p|\leq m,\, p_1\geq 0}$ とすると，(3.10)はまとめて $F_m(\alpha^{(m)}) = 0$ とし，$2m(m+1)+1$ 個の未知数に対する $2m(m+1)+1$ 個の方程式である。

3.3　逐次近似

決定方程式は勿論非線形であり，未知数の数も多いから近似解法を考えねばならない。$F_m(\alpha^{(m)}) = 0$ が

$$(3.11) \qquad A_m\alpha^{(m)} - a = \varepsilon\cdot C_m(\alpha^{(m)})$$

と同値であることに着目する。ここで A_m は

$$A_m = \begin{bmatrix} \nu^2 & & & & & & & \\ & \nu^2-\nu_1^2 & 2\sigma\nu_1 & & & & & \\ & -2\sigma\nu_1 & \nu^2-\nu_1^2 & & & & & 0 \\ & & & \nu^2-\nu_2^2 & 2\sigma\nu_2 & & & \\ & & & -2\sigma\nu_2 & \nu^2-\nu_2^2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2 & 2\sigma(p_1\nu_1+p_2\nu_2) \\ & 0 & & & & & -2\sigma(p_1\nu_1+p_2\nu_2) & \nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2 \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$a = {}^t(0,\ a/2,\ 0,\ b/2,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

$$C_m(\alpha^{(m)}) = {}^t(c_0,\ \cdots,\ c_p,\ d_p,\ \cdots)_{|p|\leq m,\ p_1\geq 0}$$

$$c_p = 2\mathcal{I}\{x_m^3(u)\cos(p,\nu,u)\},\quad d_p = 2\mathcal{I}\{x_m^3(u)\sin(p,\nu,u)\},\quad c_0 = \mathcal{I}\{x_m^3(u)\}$$

A_mはブロック対角行列であるから

$$(3.12)\quad \det A_m = \nu^2 \prod_{\substack{1\leq|p|\leq m \\ p_1\geq 0}} \left[\{\nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}^2 + 4\sigma^2(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\right]$$

であり

$$(3.13)\quad \{\nu^2-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}^2+4\sigma^2(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2 \geqq 4\sigma^2(\nu^2-\sigma^2)$$

がすべての(p_1, p_2)について成り立つから，A_mは$0<\sigma<\nu$のときnon-singularである。そこで逐次近似として次のものを考える：

適当な出発値$\alpha_0^{(m)}$から，ベクトル列$\{\alpha_k^{(m)}\}$を

$$(3.14)\quad \alpha_k^{(m)} = \varepsilon A_m^{-1} C_m(\alpha_{k-1}^{(m)}) + A_m^{-1} a$$

によって作る。すると

<u>Proposition 4.</u> 次の(i)(ii)を仮定する。

(i) $F_m(\alpha^{(m)}) = 0$には，解$\hat{\alpha}^{(m)}$が存在する。

(ii) $\hat{\alpha}^{(m)}$の近傍では，C_mに対して局所LIPSCHITZ条件がなりたつ：

$$(3.15)\quad \|C_m(\alpha^{(m)\prime}) - C_m(\alpha^{(m)\prime\prime})\| \leqq L\|\alpha^{(m)\prime} - \alpha^{(m)\prime\prime}\|.$$

$\alpha_0^{(m)}$が$\hat{\alpha}^{(m)}$の近傍に入り，かつ

$$(3.16)\quad \varepsilon C_0 L < 1$$

が成り立つならば，上の逐次近似列は$\hat{\alpha}^{(m)}$に収束する。但

$C_0 = \|A_m^{-1}\|$.

§4. VAN DER POL型方程式

4.1 ここでは

$$(4.1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} - 2\lambda(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t$$

を考える。但 λ は正のパラメータ，$\nu_1 = 2\pi/\omega_1$，$\nu_2 = 2\pi/\omega_2$。ν_1 と ν_2 は 1 に等しくないと仮定しておく。DUFFING型の場合と違って，この型に対しては準周期解が存在えのものがはっきりしていないので，まずそれを示えう。

ベクトル形に書き直して，

$$(4.2)\quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(\lambda)\mathbf{x} + \varphi(t) + \lambda\eta(\mathbf{x})$$

但 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\lambda \end{bmatrix}$，$\varphi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a\cos\nu_1 t + b\cos\nu_2 t \end{bmatrix}$，$\eta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x^2y \end{bmatrix}$.

λ に依存する作用素

$$(4.3)\quad L(\lambda)y = \frac{dy}{dt} - A(\lambda)y$$

については，$\mu = -\lambda$，$\nu = 1$ として Proposition 3 を適用すれば，$\lambda < 1$ のとき regular であり，対応する GREEN 函数は

$$(4.4)\quad G_\lambda(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{for } t > s, \\ -e^{+\lambda t}\begin{bmatrix} \cos\theta t - \frac{\lambda}{\theta}\sin\theta t & \frac{1}{\theta}\sin\theta t \\ -\frac{1}{\theta}\sin\theta t & \cos\theta t + \frac{\lambda}{\theta}\sin\theta t \end{bmatrix} & \text{for } t < s \end{cases}$$

但 $\theta = \sqrt{1-\lambda^2}$。不等式

$$(4.5)\quad \| G_\lambda(t,s) \| \leqq \frac{2-\lambda^2}{\theta} e^{-\lambda|t-s|}$$

がなりたつ。従って方程式

(4.6) $\quad L(\lambda)\,y = \varphi(t)$

の準周期解 $y = y_0(t;\lambda) = \begin{bmatrix} x_0(t;\lambda) \\ y_0(t;\lambda) \end{bmatrix}$ は

$$(4.7)\quad \left\{ \begin{aligned} x_0(t;\lambda) &= \frac{a}{(1-\nu_1^2)^2+4\lambda^2\nu_1^2}\{(1-\nu_1^2)\cos\nu_1 t - 2\lambda\nu_1 \sin\nu_1 t\} \\ &\quad + \frac{b}{(1-\nu_2^2)^2+4\lambda^2\nu_2^2}\{(1-\nu_2^2)\cos\nu_2 t - 2\lambda\nu_2 \sin\nu_2 t\}, \\ y_0(t;\lambda) &= \frac{a\nu_1}{(1-\nu_1^2)^2+4\lambda^2\nu_1^2}\{-(1-\nu_1^2)\sin\nu_1 t - 2\lambda\nu_1 \cos\nu_1 t\} \\ &\quad + \frac{b}{(1-\nu_2^2)^2+4\lambda^2\nu_2^2}\{-(1-\nu_2^2)\sin\nu_2 t - 2\lambda\nu_2 \cos\nu_2 t\}. \end{aligned} \right.$$

(4.1) の準周期解は $y_0(t;\lambda)$ の近傍に存在することが，以下のようにして示される。定数 K を

$$(4.8)\quad K = \max\left(\frac{|a|}{|1-\nu_1^2|} + \frac{|b|}{|1-\nu_2^2|},\ \frac{|a|\nu_1}{|1-\nu_1^2|} + \frac{|b|\nu_2}{|1-\nu_2^2|} \right)$$

と定める。すると

$$(4.9)\quad |x_0(t;\lambda)|,\ |y_0(t;\lambda)| < K \quad \text{for all } t \text{ and } 0<\lambda<1.$$

次に $y_0(t;\lambda)$ を (4.1) へ代入したときの残差は

$$\left\| \frac{dy_0(t;\lambda)}{dt} - A(\lambda)\,y_0(t;\lambda) - \varphi(t) - \lambda\,\eta(y_0(t;\lambda)) \right\|$$

$$= \| -\lambda\,\eta(y_0(t;\lambda)) \|$$

$$\leqq 2\lambda K^3$$

と評価できるから，Theorem にいう r として

$$(4.8)\quad r = 2\lambda K^3$$

とする。R^2 の領域として $\mathcal{D}_K$，$\mathcal{D}'$ を

$$\mathcal{D}_K = \{x\ ;\ \|x\| \leqq 2K\},$$

$$\mathcal{D}' = \bigcup_t \{x\ ;\ \|x - y_0(t;\lambda)\| \leqq K\}$$

とすれば，$y_0(t;\lambda)\in\mathcal{D}_K$ for all t かつ $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}_K$ がなりたつ。

(4.2)式の右辺の x についての Jacobian 行列を $\Psi(x;\lambda)$ とすると $x\in\mathcal{D}'$ ならば

(4.9) $\|\Psi(x;\lambda)-A(\lambda)\|\leqq 24\lambda K^2$

がなりたつ。(4.5)式から Theorem にいう定数 M として

(4.10) $M=\dfrac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}$

となる。以上の考察から，次の二つの不等式を同時に満足する $\kappa<1$ がとれれば真の準周期解が存在することになる：

$$24\lambda K^2\leqq\frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{2(2-\lambda^2)}\kappa\ ,\quad \frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\cdot 2\lambda K^3\leqq(1-\kappa)K$$

これは可能である。なぜなら

(4.11) $K<\sqrt{\dfrac{\sqrt{1-\lambda^2}}{52(2-\lambda^2)}}$

ととれば（すなわち $|a|,|b|$ の値を小さくして），

$$\begin{cases}\dfrac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\cdot 24\lambda K^2<\dfrac{48}{52}\\[2ex] \dfrac{2(2-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}\cdot 2\lambda K^2<\dfrac{4}{52}\end{cases}$$

となるからである。

4.2 従って，(4.1)の準周期解の近似を行うことは意味がある問題になる。GALERKIN scheme の構成の仕方は §3 と全く同様である。結果だけを記述すると，決定方程式系は

(4.12) $G_m(\alpha^{(m)})={}^t(f^{(m)}(0,0),\cdots,f^{(m)}_p,g^{(m)}_p,\cdots)_{|p|\leq m,\ p_1\geq 0}$

(4.13)$_1$ $f^{(m)}(0,0)\equiv\alpha(0,0)+\lambda\mathcal{J}\{x_m^2(u)y_m(u)\}$

(4.13)$_2$ $f^{(m)}(1,0)\equiv(1-\nu_1^2)\alpha(1,0)-2\lambda\nu_1\beta(1,0)-\dfrac{a}{2}+2\lambda\mathcal{J}\{x_m^2(u)y_m(u)\cos\nu_1u_1\}$

(4.13)$_3$ $f^{(m)}(0,1) \equiv (1-\nu_2^2)\alpha(0,1) - 2\lambda\nu_2\beta(0,1) - \frac{b}{2} + 2\lambda \mathcal{I}\{x_m^2(u)y_m(u)\cos\nu_2 u_2\}$

(4.13)$_4$ $f_p^{(m)} \equiv \{1-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}^2\alpha_p - 2\lambda(p_1\nu_1+p_2\nu_2)\beta_p + 2\lambda\mathcal{I}\{x_m^2(u)y_m(u)\cos(p,\nu,u)\}$
for $|p| \geqq 2$

(4.13)$_5$ $g_p^{(m)} \equiv \{1-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2\}\beta_p + 2\lambda(p_1\nu_1+p_2\nu_2)\alpha_p + 2\lambda\mathcal{I}\{x_m^2(u)y_m(u)\sin(p,\nu,u)\}$
for $|p| \geqq 1$

逐次近似解法としては

(4.14) $\alpha_k^{(m)} = -\lambda B_m^{-1} D_m(\alpha_{k-1}^{(m)}) + B_m^{-1}\mathbf{a}$, $k = 1, 2, \cdots$

を採用する。ここで B_m はパラメータ λ に依存する行列で

$$(4.15)\quad B_m = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1-\nu_1^2 & -2\lambda\nu_1 & & & & & \\ & 2\lambda\nu_1 & 1-\nu_1^2 & & & & & 0 \\ & & & 1-\nu_2^2 & -2\lambda\nu_2 & & & \\ & & & 2\lambda\nu_2 & 1-\nu_2^2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2 & -2\lambda(p_1\nu_1+p_2\nu_2) \\ & 0 & & & & & 2\lambda(p_1\nu_1+p_2\nu_2) & 1-(p_1\nu_1+p_2\nu_2)^2 \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

である。

$\mathbf{a} = {}^t(0,\ a/2,\ 0,\ b/2,\ 0, \cdots, 0)$,

$D_m(\alpha^{(m)})$ は非線型項に対応する部分。

§5. 数値例

Duffing型の場合. 定数とパラメータは

$\sigma = \frac{1}{8}$, $\nu = \sqrt{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{32}$, $\nu_1 = 1$, $a = \frac{1}{8}$, $\nu_2 = \sqrt{5}$, $b = \frac{1}{2}$

とする。$m = 8$ として, 収束判定を 10^{-8} とすると, (3.3) に対応する係数を出発値とし, 3回の反復で逐次近似は収束し, 近似解

$$
\begin{aligned}
(5.1)\quad \bar{x}_8(t) = 2\{ & 0.0589905\cos\nu_1 t + 0.014706\sin\nu_1 t \\
& -0.0804708\cos\nu_2 t + 0.0150072\sin\nu_2 t \\
& -0.0000016\cos 3\nu_1 t + 0.0000015\sin 3\nu_1 t \\
& +0.0000069\cos(2\nu_1+\nu_2)t - 0.0000026\sin(2\nu_1+\nu_2)t \\
& -0.0000468\cos(2\nu_1-\nu_2)t + 0.0000376\sin(2\nu_1-\nu_2)t \\
& -0.0000054\cos(\nu_1+2\nu_2)t - 0.0000004\sin(\nu_1+2\nu_2)t \\
& -0.0000116\cos(\nu_1-2\nu_2)t + 0.0000076\sin(\nu_1-2\nu_2)t \\
& +0.0000007\cos 3\nu_2 t + 0.0000004\sin 3\nu_2 t \\
& +0.0000001\cos(4\nu_1-\nu_2)t \\
& -0.0000003\cos(3\nu_1-2\nu_2)t - 0.0000005\sin(3\nu_1-2\nu_2)t \}
\end{aligned}
$$

がえられる．（上に書かれない係数はすべて絶対値10^{-7}より小．以下同じ）

(5.2) $|\bar{x}_8(t)| \leqq 0.3385969$ for all t

と評価され，また $\bar{x}_8(t)$ を系に代入したときの残差としては

(5.3) $r = 1.378 \times 10^{-9}$

である。そこで Theorem にいう δ, κ として $\delta = 0.125$，$\kappa = 0.78136$

ととれば条件が満足され，真の解の評価

(5.4) $|\bar{x}_8(t) - \hat{x}(t)| \leqq 2.445 \times 10^{-7}$ for all t

がえられる．

VAN DER POL型の場合。定数とパラメータは

$\lambda = 0.0625$， $\nu_1 = \sqrt{2}$ ，$a = 0.0625$，$\nu_2 = \sqrt{5}$ ，$b = 0.125$

とする。$m = 7$ として，収束判定を 10^{-8} とすると，(4.7)に対応する値を出発値として，3回の反復で収束し，近似解

$$
\begin{aligned}
(5.5)\quad \bar{x}_7(t) = 2\{ & -0.0303083\cos\nu_1 t - 0.0053722\sin\nu_1 t \\
& -0.0155497\cos\nu_2 t - 0.0010912\sin\nu_2 t
\end{aligned}
$$

$$-0.0000003\cos 3\nu_1 t - 0.0000005 \sin 3\nu_1 t$$
$$-0.0000007\cos(2\nu_1+\nu_2)t - 0.0000014\sin(2\nu_1+\nu_2)t$$
$$+0.0000011\cos(2\nu_1-\nu_2)t + 0.0000062\sin(2\nu_1-\nu_2)t$$
$$-0.0000002\cos(\nu_1+2\nu_2)t - 0.0000006\sin(\nu_1+2\nu_2)t$$
$$+0.0000014\sin(\nu_1-2\nu_2)t\}$$

がえられる。

(5.6) $|\bar{x}_7(t)| \leqq 0.1046678$, $|\frac{d}{dt}\bar{x}_7(t)| \leqq 0.1753960$ for all t

と評価され，また $\bar{x}_7(t)$ を系に代入した残差としては

(5.7) $r = 1.094 \times 10^{-10}$

である。そこで Theorem にいう δ, κ として $\delta = 0.0625$, $\kappa = 0.86$ ととれば条件が満足され，真の解の評価

(5.8) $|\bar{x}_7(t) - \hat{x}(t)| \leqq 6.252 \times 10^{-8}$

がえられる。

References

[1] Бурд, В.Ш., Колесов, Ю.С. и Красносельский, М.А.: Исследование функции Грина дифференциальных операторов с почти периодческими коэффициентами, Изв. АН СССР, Сер. мат., 33(1969), 1089-1119.

[2] Urabe, M.: Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rational Mech. Anal., 20(1965), 120-152.

[3] ———— : On the existence of quasiperiodic solutions to nonlinear quasiperiodic differential equations, Nonlinear Vibration Problems, 1974, 85-93.

[4] 三井斌友：非線型振動の準周期解の近似，1975年日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会予稿集，72 - 77.

[5] ———— ： 同上(II)，1976年日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会予稿集，31 - 36.